Αναλυτική λύση για την εύρεση των βέλτιστων χαρακτηριστικών ενός υδραυλικού καταθλιπτικού συστήματος

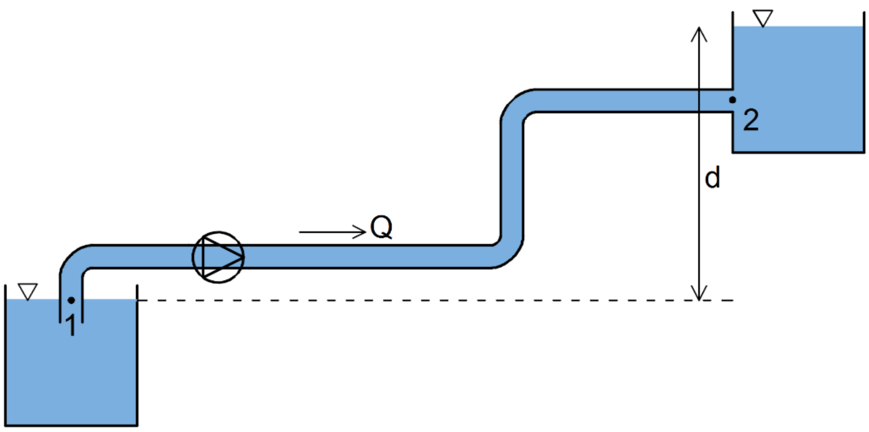
Ευάγγελος Π. Φινδανής
Αγρονόμος Τοπογράφος Μηχανικός ΑΠΘ
ΜΔΕ Υδραυλικής Μηχανικής ΔΠΘ
Υποψήφιος Διδάκτορας ΤΑΤΜ ΑΠΘ
https://vfindanis.com/, e-mail: vangelisfindanis@gmail.com

1. Εισαγωγή

Μεγάλο μέρος της ενέργειας που καταναλώνεται παγκοσμίως οφείλεται στην χρήση αντλιών. Γι' αυτό τον λόγο οι μηχανικοί που ασχολούνται με υδραυλικά δίκτυα πρέπει να ελαχιστοποιήσουν την δαπάνη ενέργειας των αντλιών και συνεπώς το ανάλογο κόστος λειτουργίας τους. Σε ένα υδραυλικό δίκτυο η επιλογή μίας αντλίας επηρεάζει και τις υπόλοιπες παραμέτρους του δικτύου όπως η διάμετρος των αγωγών. Στην παρακάτω ανάλυση παρουσιάζεται η λογική πίσω από την βελτιστοποίηση ενός καταθλιπτικού συστήματος ενώ εξάγονται αναλυτικές σχέσεις που δίνουν τα βέλτιστα χαρακτηριστικά ενός τέτοιου συστήματος.

2. Περιγραφή του προβλήματος

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να μεταφέρουμε νερό από μία δεξαμενή χαμηλού υψομέτρου σε μία δεξαμενή υψηλότερου υψομέτρου μέσω ενός καταθλιπτικού αγωγού (σχήμα 1). Για να είναι δυνατό αυτό είναι αναγκαία η εγκατάσταση μίας αντλίας ονομαστικής παροχής Q και ονομαστικού μανομετρικού H η οποία θα ωθεί το νερό προς τα πάνω. Η υψομετρική διαφορά των στάθμεων των δεξαμενών, δηλαδή το γεωμετρικό ύψος του συστήματος, ισούται με d.



Σχήμα 1: Ένας καταθλιπτικός αγωγός μεταφέρει παροχή Q από μία δεξαμενή χαμηλού υψομέτρου σε μία υψηλού. Το γεωμετρικό ύψος του συστήματος είναι d.

Εντός του καταθλιπτικού αγωγού, το νερό χάνει ενέργεια (φορτίο) λόγω των τριβών του με τον αγωγό. Ως γνωστόν, οι γραμμικές απώλειες φορτίου δίνονται από την εξίσωση Darcy-Weisbach

$$h_f = f\frac{LQ^2}{12D^5} \tag{1}$$

όπου f ο συντελεστής τριβής, L το μήκος του αγωγού, Q η παροχή και D η διάμετρος του αγωγού. Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε πως όταν το D αυξάνεται, οι απώλειες ενέργειας της ροής μειώνονται.

Η αντλία έχει ως σκοπό να προσθέσει στην ροή φορτίο Η ίσο με το μανομετρικό της ώστε η ροή να υπερνικήσει τις γραμμικές απώλειες φορτίου και την υψομετρική διαφορά, ήτοι $H=d+h_f$. Επομένως, όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος του αγωγού, τόσο μικρότερη τιμή έχει η απώλεια φορτίου h_f, με αποτέλεσμα να απαιτείται η εγκατάσταση μικρότερης αντλίας (μικρότερη τιμή μανομετρικού Η). Από την άλλη όμως εάν επιλεχθεί μεγαλύτερη διάμετρος αγωγού, δαπανείται μεγαλύτερο χρηματικό ποσό για την αγορά του αγωγού διότι το κόστος του εξαρτάται άμεσα από την διάμετρο του. Οπότε **εάν χρησιμοποιήσουμε μεγάλη διάμετρο αγωγού, πληρώνουμε πιο πολλά για τον ίδιο τον αγωγό αλλά κερδίζουμε στο κόστος της αντλίας**. Το βασικό ερώτημα, λοιπόν, είναι το εξής: Ποιος συνδυασμός μανομετρικού αντλίας και διαμέτρου αγωγού θα μας δώσει το μικρότερο κόστος αγοράς και λειτουργίας; Με άλλα λόγια, αναζητούμε τις τιμές των μεταβλητών απόφασης Η και D που βελτιστοποιούν το υδραυλικό σύστημα μας.

3. Μαθηματική διατύπωση

Η ηλεκτρική ισχύς P που καταναλώνει ο κινητήρας μίας αντλίας είναι

$$P = \frac{\rho g Q H}{n_0} \tag{2}$$

όπου ρ η πυκνότητα του νερού και n_0 ο ολικός συντελεστής απόδοσης του αντλητικού συγκροτήματος (κινητήρας + αντλία). Ισχύει $n_0 = n_m \cdot n$ όπου n_m και n οι βαθμοί απόδοσης του κινητήρα και της αντλίας αντίστοιχα. Το ετήσιο κόστος λειτουργίας της αντλίας δίνεται από την σχέση

$$C_1 = TpP \tag{3}$$

όπου Τ είναι ο αριθμός των ωρών λειτουργίας της αντλίας μέσα σε έναν χρόνο και p η τιμή της κιλοβατώρας. Έπειτα, η δαπάνη αγοράς ενός μέτρου αγωγού με διάμετρο D υπολογίζεται από τον τύπο

$$\delta = \mu D^{\nu} \tag{4}$$

Η παραπάνω σχέση είναι καθαρά εμπειρική και **οι συντελεστές** μ **και** ν **προκύπτουν από το κόστος των διάφορων διαμέτρων που υπάρχουν στο εμπόριο εφαρμόζοντας την διαδικασία της γραμμικής παλινδρόμησης**. Το ν είναι καθαρός αριθμός ενώ το μ έχει ως μονάδα το €/$m^{\nu+1}$ αφού η μονάδα μέτρησης του δ είναι το €/m.

Αφού το ένα μέτρο αγωγού κοστίζει δ, ένας αγωγός μήκους L κοστίζει Lδ. Άρα το γινόμενο Lδ είναι η συνολική δαπάνη αγοράς για τον αγωγό. Ανάγουμε την συνολική δαπάνη σε ετήσια πολλαπλασιάζοντας την ποσότητα Lδ με τον συντελεστή αποσβέσεως ε, ο οποίος προκύπτει από την σχέση

$$\varepsilon = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \tag{5}$$

όπου i το προεξοφλητικό επιτόκιο και n ο χρόνος αποσβέσεως του υλικού σε έτη. Συνήθως, θεωρούμε ότι i=5 %. Έτσι το ετήσιο κόστος λειτουργίας του αγωγού δίνεται από τον τύπο

$$C_2 = \varepsilon L \mu D^{\nu} \tag{6}$$

Ο σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος λειτουργίας του καταθλιπτικού αγωγού, δηλαδή την ποσότητα

$$C = C_1 + C_2 \tag{7}$$

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται φανερό πως

$$\boxed{C(H, D) = Tp\frac{\rho g Q H}{n_0} + \varepsilon L \mu D^{\nu}} \tag{8}$$

Η συνάρτηση C έχει ως μεταβλητές τα H και D. Οι μεταβλητές αυτές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους γιατί συσχετίζονται από την εξίσωση Bernoulli, ήτοι

$$\boxed{H = d + f\frac{LQ^2}{12D^5}} \tag{9}$$

Δηλαδή **η συνάρτηση** C=C(H,D) **είναι η συνάρτηση στόχου που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί με τον περιορισμό της σχέσης (9)**. Το μαθηματικό πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί αριθμητικά με την χρήση λογισμικών Η/Υ όπως το MS Excel. Μία τέτοια επίλυση παρουσιάζεται στο παράδειγμα 1.

Παράδειγμα 1 - Αριθμητική επίλυση του προβλήματος

Έστω πως έχουμε έναν καταθλιπτικό αγωγό μήκους 500 m ο οποίος μεταφέρει νερό από μία δεξαμενή χαμηλής στάθμης σε μία υψηλότερης στάθμης. Το υψόμετρο της στάθμης της πρώτης δεξαμενής βρίσκεται στα 100 m ενώ η στάθμη της δεύτερης δεξαμενής βρίσκεται στα 130 m. Εάν επιθυμούμε η παροχή του αγωγού να είναι 0.2 m^3/s, επιλέξτε το βέλτιστο συνδυασμό διαμέτρου και μανομετρικού.

Θεωρήστε πως η αντλία λειτουργεί 6000 ώρες τον χρόνο ενώ το κόστος της κιλοβατώρας είναι ίσο με 0.06 €. Οι συντελεστές μ και ν έχουν τιμές 411 και 1.56 αντίστοιχα. Η απόλυτη τραχύτητα του αγωγού είναι ίση με 0.03 mm και η απόδοση του αντλητικού συγκροτήματος είναι 90 %. Τέλος, το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 5 % και η διάρκεια ζωής του έργου είναι 40 έτη.

<u>Επίλυση</u>

Αρχικά, υπολογίζουμε τον συντελεστή αποσβέσεως, ήτοι

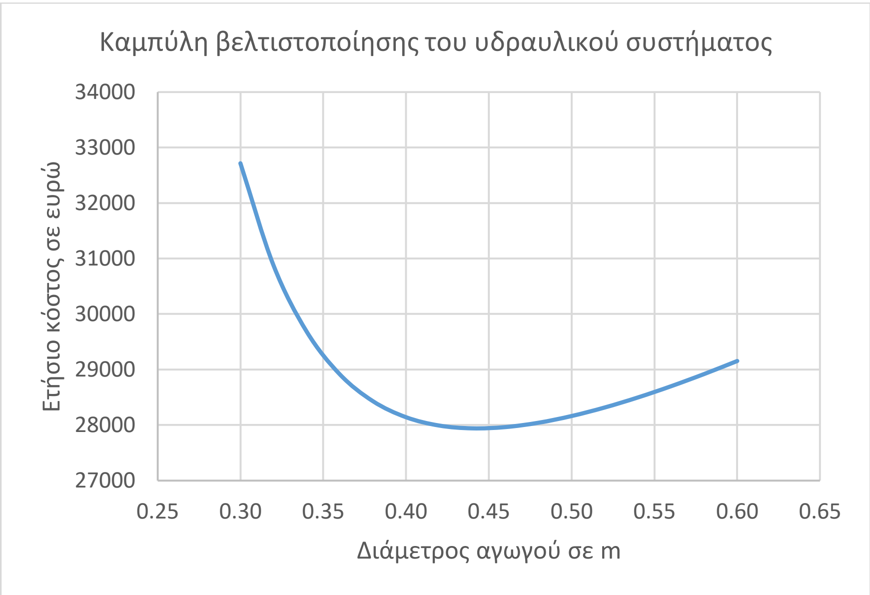
$$\varepsilon = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{0.05}{1-(1+0.05)^{-40}} = 0.05828$$

Έπειτα, η επίλυση γίνεται με την βοήθεια του πίνακα 1. Η λογική που ακολουθούμε είναι η εξής: δοκιμάζουμε διάφορες τιμές για το D και υπολογίσουμε μέσω της σχέσης (9) το αντίστοιχο H. Αφού γνωρίζουμε πλέον τα H και D, υπολογίζουμε με την σχέση (8) το συνολικό ετήσιο κόστος λειτουργίας του καταθλιπτικού αγωγού. Έτσι για κάθε ζεύγος Η και D λαμβάνουμε ένα κόστος C. Επιλέγουμε ως βέλτιστη λύση τα D και Η που αντιστοιχούν στο χαμηλότερο κόστος.

D (m)	V (m/s)	Re	f	h_f (m)	H (m)	P (kW)	C_1 (€)	C_2 (€)	C (€)
0.30	2.83	848826	0.0137	9.40	**39.40**	85.80	30888	1831	32718
0.32	2.49	795775	0.0137	6.80	**36.80**	80.15	28853	2025	30878
0.34	2.20	748964	0.0137	5.03	**35.03**	76.28	27460	2225	29686
0.36	1.96	707355	0.0137	3.78	**33.78**	73.56	26483	2433	28916
0.38	1.76	670126	0.0137	2.89	**32.89**	71.62	25785	2647	28432
0.40	1.59	636620	0.0138	2.24	**32.24**	70.21	25275	2868	28143
0.42	1.44	606305	0.0138	1.76	**31.76**	69.16	24898	3094	27993
0.44	**1.32**	**578745**	**0.0138**	**1.40**	**31.40**	**68.37**	**24615**	**3327**	**27942**
0.46	1.20	553582	0.0139	1.12	**31.12**	67.78	24399	3566	27965
0.48	1.11	530516	0.0139	0.91	**30.91**	67.31	24233	3811	28044
0.50	1.02	509296	0.0139	0.74	**30.74**	66.95	24103	4062	28164
0.52	0.94	489708	0.0140	0.61	**30.61**	66.67	24000	4318	28318
0.54	0.87	471570	0.0140	0.51	**30.51**	66.44	23919	4580	28499
0.56	0.81	454728	0.0141	0.43	**30.43**	66.26	23854	4847	28701
0.58	0.76	439048	0.0141	0.36	**30.36**	66.11	23801	5120	28921
0.60	0.71	424413	0.0142	0.30	**30.30**	65.99	23758	5398	29156

Πίνακας 1: Εύρεση της βέλτιστης λύσης του συστήματος αγωγού-αντλίας.

Στον πίνακα 1, το χαμηλότερο ετήσιο κόστος είναι 27942 €. Επομένως, τα βέλτιστα Η και D έχουν τιμές 31.40 m και 440 mm αντίστοιχα. Δηλαδή η αντλία που θα εγκατασταθεί πρέπει να έχει ονομαστική παροχή 0.2 m^3/s και ονομαστική ισχύ 68.37 kW. Επίσης, στον πίνακα 1 έχουμε υπολογίσει και την ταχύτητα V της ροής, τον αριθμό Reynolds και τον συντελεστή τριβής f. Η εξίσωση που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής είναι η Swamee-Jain αλλά θα μπορούσε εναλλακτικά να είχε εφαρμοστεί η εξίσωση των Παπαευαγγέλου, Ευαγγελίδη και Τζιμόπουλου (2010). Τέλος, στο σχήμα 2 παρουσιάζεται η καμπύλη ετήσιου κόστους του υδραυλικού συστήματος συναρτήσει της διαμέτρου του αγωγού. Το ελάχιστο σημείο της καμπύλης δίνεται για διάμετρο 440 mm.



Σχήμα 2: Η καμπύλη κόστους για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

4. Αναλυτική επίλυση του προβλήματος

Για να επιλύσουμε αναλυτικά το πρόβλημα βελτιστοποίησης της συνάρτησης στόχου (8) υπό τον περιορισμό (9) θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Η μέθοδος αυτή υπαγορεύει ότι για να βελτιστοποιήσουμε την συνάρτηση στόχου f(x,y) υπό έναν περιορισμό g(x,y)=0 πρέπει να σχηματίσουμε την βοηθητική συνάρτηση

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

όπου λ ο συντελεστής του Lagrange. Έπειτα, επιλύοντας το σύστημα

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \ \text{ και } \ \frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0$$

προκύπτουν οι τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών x και y που βελτιστοποιούν την συνάρτηση στόχου f.

Ας εφαρμόσουμε την παραπάνω μεθοδολογία στο πρόβλημα βελτιστοποίησης του συστήματος αντλίας-αγωγού. Δεδομένα του προβλήματος αυτού είναι οι εξής ποσότητες:

- Οι ώρες λειτουργίας T της αντλίας μέσα σε ένα έτος
- Η τιμή p της κιλοβατώρας (kWh)
- Ο συντελεστής απόδοσης n_0 του αντλητικού συγκροτήματος
- Οι συντελεστές μ και ν για τον αγωγό (που εκτιμώνται μέσω της διαδικασίας της γραμμικής παλινδρόμησης)
- Η υψομετρική διαφορά d μεταξύ της ανάντη και κατάντη δεξαμενής
- Το μήκος L και η παροχή Q του αγωγού
- Η απόλυτη τραχύτητα κ του αγωγού
- Το προεξοφλητικό επιτόκιο i και ο χρόνος αποσβέσεως n του κεφαλαίου. Επομένως, δεδομένος θεωρείται και ο συντελεστής αποσβέσεως ε διότι υπολογίζεται από την σχέση (5).
- Τέλος, θεωρούμε ότι ο συντελεστής τριβής f είναι γνωστός.

Ζητούμενα του προβλήματος είναι η βέλτιστη διάμετρος D_{opt} του αγωγού και το βέλτιστο μανομετρικό H_{opt} της αντλίας.

Βάσει των παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι είναι δυνατόν να υπολογισθούν οι ακόλουθες ποσότητες

$$a_1 = Tp\frac{\rho g Q}{n_0} \tag{10}$$

$$a_2 = \varepsilon L \mu \tag{11}$$

$$a_3 = \frac{fLQ^2}{12} \tag{12}$$

Το a_1 έχει μονάδα το €/m, το a_2 έχει το €/m^{ν} και το a_3 έχει ως μονάδα το m^6. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (10), (11) και (12), η συνάρτηση στόχου (8) και ο περιορισμός (9) γράφονται αντιστοίχως ως εξής:

$$C(H,D) = a_1 H + a_2 D^{\nu} \tag{13}$$

$$H - d - \frac{a_3}{D^5} = 0 \tag{14}$$

Σύμφωνα με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange σχηματίζουμε την βοηθητική συνάρτηση

$$h(H,D,\lambda) = a_1 H + a_2 D^{\nu} + \lambda\left(H - d - \frac{a_3}{D^5}\right) \tag{15}$$

και προσδιορίζουμε τις μερικές παραγώγους της h ως προς H, D και λ. Έχουμε

$$\frac{\partial h}{\partial H} = a_1 + \lambda \tag{16}$$

$$\frac{\partial h}{\partial D} = a_2 \nu D^{\nu-1} + 5\lambda a_3 \frac{1}{D^6} \tag{17}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = H - d - \frac{a_3}{D^5} \tag{18}$$

Θέτουμε τις μερικές παραγώγους ως προς H, D και λ ίσες με το μηδέν και ως εκ τούτου παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$a_1 + \lambda = 0 \tag{19}$$

$$a_2 \nu D^{\nu-1} + 5\lambda a_3 \frac{1}{D^6} = 0 \tag{20}$$

$$H - d - \frac{a_3}{D^5} = 0 \tag{21}$$

Από την εξίσωση (19) προκύπτει ότι $\lambda = -a_1$. Αντικαθιστώντας την σχέση αυτή στην εξίσωση (20) λαμβάνουμε ότι

$$\boxed{D_{opt} = \sqrt[\nu+5]{\frac{5a_1 a_3}{a_2 \nu}}} \tag{22}$$

Το βέλτιστο μανομετρικό της αντλίας δίνεται εάν αντικαταστήσουμε στην σχέση (21) την σχέση (22), ήτοι

$$\boxed{H_{opt} = d + \frac{a_3}{D_{opt}^5}} \tag{23}$$

Οι εξισώσεις (22) και (23) δίνουν την διάμετρο D_{opt} του αγωγού και το μανομετρικό H_{opt} της αντλίας που ελαχιστοποιούν το κόστος λειτουργίας του καταθλιπτικού αγωγού. **Η βέλτιστη διάμετρος** D_{opt} **του υδραυλικού συστήματος δεν εξαρτάται από το μήκος** L **του αγωγού** διότι, κατά τον υπολογισμό του λόγου a_3/a_2, το L απαλείφεται. Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στόχου, δηλαδή το ελάχιστο δυνατό κόστος του υδραυλικού συστήματος, είναι

$$\boxed{C_{opt} = a_1 H_{opt} + a_2 D_{opt}^{\nu}} \qquad (24)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης (24) εκφράζει το βέλτιστο ετήσιο κόστος λειτουργίας της αντλίας ενώ ο δεύτερος όρος εκφράζει το βέλτιστο ετήσιο κόστος λειτουργίας του αγωγού.

5. Εκ των προτέρων εκτίμηση του συντελεστή τριβής

Ο υπολογισμός του a_3 προϋποθέτει γνώση του συντελεστή τριβής f ο οποίος όμως για να υπολογιστεί πρέπει να είναι δεδομένη η ζητούμενη διαμέτρος D_{opt} του αγωγού, πράγμα αδύνατο. Έτσι ο υπολογισμός του f γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο: Αρχικά έχοντας δεδομένη την παροχή Q, υπολογίζεται μία προσεγγιστική τιμή D* της διαμέτρου D εφαρμόζοντας τον τύπο του Bresse

$$D^* = 15.5\sqrt{Q} \qquad (25)$$

όπου το Q εισάγεται σε m^3/h και το D* δίνεται σε mm. Η εξίσωση του Bresse προκύπτει με την παραδοχή ότι η ταχύτητα της ροής μέσα στον αγωγό είναι ίση με 1.47 m/s. Οι τιμές της ταχύτητας της ροής εντός αγωγών συνήθως είναι κοντά στην συγκεκριμένη τιμή και ως εκ τούτου η τιμή D* προσεγγίζει αρκετά καλά την τιμή D_{opt} που αναζητούμε.

Έπειτα, υπολογίζεται ο αριθμός Reynolds με την εξίσωση

$$Re = \frac{V^* D^*}{\eta} \qquad (26)$$

όπου η το κινηματικό ιξώδες του νερού ($\eta=10^{-6}$ m^2/s) και V* η ταχύτητα της ροής (V*=1.47 m/s βάσει του τύπου του Bresse). Στην συνέχεια, ο προσεγγιστικός συντελεστής τριβής f* υπολογίζεται από την σχέση Swamee-Jain,

$$f^* = 0.25\left[\log\left(\frac{\kappa}{3.7D^*} + \frac{5.74}{Re^{0.9}}\right)\right]^{-2} \qquad (27)$$

ή εναλλακτικά από την εξίσωση των Παπαευαγγέλου, Ευαγγελίδη και Τζιμόπουλου

$$f^* = \frac{0.2479 - 0.0000947(7-\log Re)^4}{\left[\log\left(\frac{\kappa}{3.615D^*} + \frac{7.366}{Re^{0.9142}}\right)\right]^2} \qquad (27b)$$

Έτσι έχοντας πλέον μία προσεγγιστική τιμή για τον συντελεστή τριβής μπορούμε να υπολογίσουμε το a_3 από την εξίσωση (12). Αφού ολοκληρωθεί ο υπολογισμός του D_{opt}, είναι απαραίτητο να ξαναγίνει ο υπολογισμός του συντελεστή τριβής βάσει της διαμέτρου D_{opt}. Η νέα τιμή του f πρέπει να διαφέρει ελάχιστα από το f* για να θεωρηθούν ορθοί οι υπολογισμοί των D_{opt} και H_{opt}.

Η σύγκλιση των f και f* είναι δεδομένη διότι η τιμή του D* που δίνει ο τύπος του Bresse είναι ρεαλιστική. Όμως εάν κριθεί ότι η απόκλιση των f και f* είναι μεγάλη τότε ακολουθείται η εξής διαδικασία: το D_{opt} που υπολογίστηκε θεωρείται ως νέα βελτιωμένη προσεγγιστική τιμή της διαμέτρου του αγωγού, θέτουμε $D^* \leftarrow D_{opt}$. Έτσι γίνεται ξανά υπολογισμός των f^*, a_3 και D_{opt} βάσει του νέου D^*. Έπειτα, ελέγχεται ξανά η σύγκλιση μεταξύ των f και f^*. Αν υπάρχει σύγκλιση, τότε το νέο D_{opt} είναι η βέλτιστη τιμή της διαμέτρου του αγωγού. Αν όχι, η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

6. Σύνοψη της μεθοδολογίας

Η μεθοδολογία που ακολουθείται για την εύρεση των D_{opt} και H_{opt} είναι η ακόλουθη:

1. Χρήση της εξίσωσης (25) για τον υπολογισμό του D^*.
2. Εφαρμογή των εξισώσεων (26) και (27) ή (27b) για τον προσδιορισμό του f^*.
3. Υπολογισμός των a_1, a_2 και a_3 από τις εξισώσεις (10), (11) και (12) αντίστοιχα. Στην εξίσωση (12) ως f χρησιμοποιείται το f^*.
4. Υπολογισμός της βέλτιστης διαμέτρου από την σχέση (22).
5. Υπολογισμός του βέλτιστου μανομετρικού της αντλίας από την σχέση (23).
6. Προσδιορισμός του f χρησιμοποιώντας ως τιμή της διαμέτρου το D_{opt} μέσω της εξίσωσης Swamee-Jain. Προσοχή στο ότι η ταχύτητα της ροής και ο αριθμός Reynolds πρέπει να ξαναϋπολογιστούν.
7. Έλεγχος της σύγκλισης μεταξύ των f και f^*. Εάν ικανοποιείται η σύγκλιση, η λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης το σημείο (D_{opt}, H_{opt}). Εάν δεν ικανοποιείται, θέτουμε $D^* \leftarrow D_{opt}$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία από το βήμα 2 μέχρι το βήμα 7 έως ότου να υπάρξει σύγκλιση.
8. Τέλος, εάν είναι επιθυμητό, μπορεί να υπολογιστεί το ελάχιστο δυνατό κόστος του υδραυλικού συστήματος από την σχέση (24).

Παράδειγμα 2 – Εφαρμογή της αναλυτικής επίλυσης

Έστω τα δεδομένα του παραδείγματος 1. Υπολογίστε αναλυτικά αυτή την φορά την βέλτιστη διάμετρο του αγωγού, το βέλτιστο μανομετρικό της αντλίας και το ελάχιστο δυνατό κόστος του υδραυλικού συστήματος.

<u>Επίλυση</u>

Εφαρμόζουμε τα βήματα της μεθοδολογίας που παρουσιάστηκε παραπάνω. Για $Q=0.2\ m^3/s$ από την σχέση του Bresse έχουμε

$$D^* = 15.5\sqrt{0.2 \cdot 3600} = 415.9\ \text{mm}$$

Έτσι από τις σχέσεις (26) και (27) προκύπτει ότι Re=611385 και $f^*=0.0138$. Έπειτα, υπολογίζονται τα a_1, a_2 και a_3 ως εξής:

$$a_1 = wp\frac{\rho g Q}{n_0} = 6000\text{h} \cdot 0.06\frac{€}{\text{kWh}} \cdot \frac{9.81\text{kN/m}^3 \cdot 0.2\text{m}^3/\text{s}}{0.9} = 784.8\ €/\text{m}$$

$$a_2 = \varepsilon L \mu = 0.05828 \cdot 500\text{m} \cdot 411€/\text{m}^{2.56} = 11976.54\ €/\text{m}^{1.56}$$

$$a_3 = \frac{f^* \cdot LQ^2}{12} = \frac{0.0138 \cdot 500\text{m} \cdot \left(0.2\text{m}^3/\text{s}\right)^2}{12\text{m/s}^2} = 0.02297\ \text{m}^6$$

Επομένως από την σχέση (22) παίρνουμε

$$D_{opt}=\sqrt[\nu+5]{\frac{5a_1a_3}{a_2\nu}}=\sqrt[6.56]{\frac{5\cdot 784.8\frac{€}{m}\cdot 0.02297m^6}{1.56\cdot 11976.54\frac{€}{m^{1.56}}}}=0.443m=443\text{ mm}$$

Από την εξίσωση (23) λαμβάνουμε

$$H_{opt}=30m+\frac{0.02297m^6}{(0.443m)^5}=31.34\text{ m}$$

Μετά υπολογίζουμε εκ νέου τον συντελεστή τριβής. Η ταχύτητα της ροής είναι

$$V=\frac{4Q}{\pi D_{opt}^2}=\frac{4\cdot 0.2m^3/s}{\pi\cdot(0.443m)^2}=1.29\text{ m/s}$$

Επίσης, ο αριθμός Reynolds είναι

$$Re=\frac{VD_{opt}}{\eta}=\frac{1.27m/s\cdot 0.433m}{10^{-6}m^2/s}=574214$$

Έτσι από την εξίσωση Swamee-Jain προκύπτει πως f=0.0138 . Ισχύει f=f*, δηλαδή έχει επιτευχθεί σύγκλιση, και ως εκ τούτου ο συνδυασμός διαμέτρου και μανομετρικού που δίνει το χαμηλότερο κόστος λειτουργίας είναι το σημείο (443 mm, 31.34 m). Το ελάχιστο δυνατό κόστος του υδραυλικού συστήματος είναι

$$C_{opt}=784.8\text{ €/m}\cdot 31.34m+11976.54\text{ €/m}^{1.56}\cdot(0.443m)^{1.56}=27963.53\text{ €}$$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα του παρόντος παραδείγματος είναι σε πλήρη συμφωνία με αυτά του παραδείγματος 1. Η μικρή διαφορά που παρατηρείται στο βέλτιστο κόστος οφείλεται στις στρογγυλοποιήσεις που έγιναν στο παράδειγμα 1.

7. Αναλυτική επίλυση του προβλήματος με τροποποιημένη συνάρτηση στόχου

Η συνάρτηση στόχου που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω λαμβάνει υπόψιν της το κόστος αγοράς του αγωγού (το οποίο ανάγεται σε ετήσιο κόστος λειτουργίας) και το λειτουργικό κόστος της αντλίας αλλά όχι το κόστος αγοράς αυτής. Κρίνεται ορθότερο να τροποποιήσουμε την συνάρτηση στόχου (8) έτσι ώστε να περιγράφει και το κόστος αγοράς Δ της αντλίας. Για να το πετύχουμε αυτό θεωρούμε ότι το Δ σχετίζεται με το μανομετρικό της Η (για παροχή Q) με την σχέση

$$\Delta=mH^t \tag{28}$$

όπου m και t δύο εμπειρικοί συντελεστές οι οποίοι προκύπτουν από την μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης όπως ακριβώς συμβαίνει και με την εξίσωση (4). Έτσι η νέα γενικευμένη συνάρτηση στόχου είναι η

$$C(H,D)=Tp\frac{\rho gQH}{n_0}+\varepsilon\left(L\mu D^\nu+mH^t\right) \tag{29}$$

η οποία πρέπει να βελτιστοποιηθεί υπό τον περιορισμό (9). Χρησιμοποιώντας ξανά την μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange προκύπτει ότι, σε αυτή την περίπτωση, η βέλτιστη διάμετρος δίνεται από την εξίσωση

$$\boxed{D_{opt} = \sqrt[\nu+5]{\frac{5a_3\left[a_1 + a_4 t\left(d + \frac{a_3}{D_{opt}^5}\right)^{t-1}\right]}{a_2\nu}}} \qquad (30)$$

όπου $a_4 = \varepsilon \cdot m$. Το a_4 έχει ως μονάδα το €/m^t . Παρατηρούμε ότι όταν m=0, δηλαδή όταν θεωρήσουμε το κόστος αγοράς της αντλίας μηδενικό, η σχέση (30) ανάγεται στην εξίσωση (22) όπως είναι άλλωστε αναμενόμενο. Επίσης, η σχέση (30) είναι άρρητη διότι περιέχει το D_{opt} και στα δύο μέλη της. Έτσι δεν λύνεται αναλυτικά παρά μόνο με αριθμητικές μεθόδους (π.χ. συναρτησιακές επαναλήψεις).

Επιπρόσθετα, στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση στόχου (29), το βέλτιστο μανομετρικό της αντλίας εξακολουθεί να δίνεται από την εξίσωση (23) ενώ το ελάχιστο δυνατό κόστος του υδραυλικού συστήματος υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\boxed{C_{opt} = a_1 H_{opt} + a_2 D_{opt}^{\nu} + a_4 H_{opt}^{t}} \qquad (31)$$

Επί της ουσίας, για την εύρεση των H_{opt} και D_{opt} που ελαχιστοποιούν την συνάρτηση στόχου (29) υπό τον περιορισμό (9) χρησιμοποιούμε την μεθοδολογία της παραγράφου 4 με τις εξής διαφορές: a) εκτός των a_1, a_2 και a_3 πρέπει να υπολογιστεί και το a_4, b) αντί των εξισώσεων (22) και (24) εφαρμόζονται οι σχέσεις (30) και (31) αντιστοίχως.

Σημειώνεται ότι η βέλτιστη διάμετρος που υπολογίζεται από την σχέση (30) αναμένεται να είναι μεγαλύτερη από αυτή που προκύπτει από την εξίσωση (22) διότι ο αριθμητής του κλάσματος στην εξίσωση (30) είναι μεγαλύτερος του αντίστοιχου αριθμητή στην σχέση (22) (στο a_1 προστίθεται μία θετική ποσότητα). Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι αυτό συμβαίνει γιατί, σύμφωνα με την συνάρτηση στόχου (29), η αντλία κοστίζει περισσότερο και επομένως το μανομετρικό H έχει μεγαλύτερη επίδραση στο κόστος συγκριτικά με την εξίσωση (8). Έτσι στην συνάρτηση στόχου (29), το μανομετρικό πρέπει να μειωθεί περισσότερο, γεγονός που οδηγεί σε μεγαλύτερη διάμετρο αγωγού ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός (9). Δηλαδή **η χρήση στης συνάρτησης στόχου (29), οδηγεί σε μικρότερη τιμή του βέλτιστου μανομετρικού** H_{opt} **της αντλίας και μεγαλύτερη τιμή της βέλτιστης διαμέτρου** D_{opt} **του αγωγού συγκριτικά με την συνάρτηση στόχου (8)**.

Παράδειγμα 3 – Εφαρμογή με την γενικευμένη συνάρτηση στόχου

Έστω τα δεδομένα του παραδείγματος 2. Υπολογίστε αναλυτικά την βέλτιστη διάμετρο του αγωγού, το βέλτιστο μανομετρικό της αντλίας και το ελάχιστο δυνατό κόστος του υδραυλικού συστήματος λαμβάνοντας υπόψιν στην συνάρτηση στόχου το κόστος αγοράς της αντλίας. Από την διαδικασία της γραμμικής παλινδρόμησης βρίσκουμε ότι m=4.4979 €/$m^{1.8741}$ και t=1.8741 .

<u>Επίλυση</u>

Τα a_1, a_2 και a_3 έχουν την ίδια τιμή με το παράδειγμα 2. Για το a_4 έχουμε

$$a_4 = \varepsilon \cdot m = 0.05828 \cdot 4.4979€ / m^{1.8741} = 0.2621\ € / m^{1.8741}$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την βέλτιστη διάμετρο D_{opt} με την εξίσωση (30). Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των συναρτησιακών επαναλήψεων χρησιμοποιώντας ξανά ως αρχική τιμή την τιμή της διαμέτρου από την εξίσωση του Bresse (415.9 mm). Στην πρώτη κιόλας επανάληψη η επίλυση της εξίσωσης (30) δίνει D_{opt}=444 mm. Παρατηρούμε ότι η χρήση της συνάρτησης στόχου (29) δίνει, σε αυτή την περίπτωση, πρακτικά το ίδιο αποτέλεσμα με την συνάρτηση στόχου (8). Προφανώς ούτε το βέλτιστο μανομετρικό ή το βέλτιστο κόστος διαφοροποιούνται.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ενώ η χρήση της συνάρτησης στόχου (29) είναι θεωρητικά πιο ορθή, είναι πιθανό να μην δώσει μεγάλες διαφορές από την συνάρτηση στόχου (8) διότι το κόστος αγοράς της αντλίας είναι μικρό συγκριτικά με το κόστος λειτουργίας της και με το κόστος αγοράς του αγωγού. Τέλος, η χρήση της εξίσωσης (22) είναι προτιμότερη έναντι της εξίσωσης (30) λόγω της απλότητας της.

8. Συμπεράσματα

Στο παρόν άρθρο διατυπώθηκε το πρόβλημα βελτιστοποίησης ενός καταθλιπτικού αγωγού και αναπτύχθηκαν αναλυτικές λύσεις του με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για διαφορετικές συναρτήσεις στόχου. Πιο συγκεκριμένα, όταν γίνεται αναζήτηση του ελάχιστου λειτουργικού κόστους του καταθλιπτικού συστήματος, αγνοώντας το κόστος αγοράς της αντλίας, τα βέλτιστα χαρακτηριστικά του συστήματος (μανομετρικό, διάμετρος και ετήσιο κόστος λειτουργίας) δίνονται από τις εξισώσεις (22), (23) και (24). Επιπρόσθετα, εάν στην ανάλυση προστεθεί το κόστος αγοράς της αντλίας, τα βέλτιστα χαρακτηριστικά του καταθλιπτικού αγωγού προκύπτουν από τις εξισώσεις (23), (30) και (31).

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν για την περίπτωση όπου οι μεταβλητές απόφασης είναι ταυτοχρόνως το μανομετρικό της αντλίας και η διάμετρος του αγωγού. Όταν μία εκ των παραπάνω μεταβλητών έχει δεδομένη τιμή (π.χ. σε υφιστάμενο καταθλιπτικό αγωγό δεδομένης διαμέτρου όπου αναζητούμε την κατάλληλη αντλία) το πρόβλημα παύει να χαρακτηρίζεται ως βελτιστοποίησης και επιλύεται με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli.

Βιβλιογραφία

Π. Τολίκας-Χ. Φωτιάδης, Σημειώσεις εφαρμοσμένης υδραυλικής, Α.Π.Θ, Θεσσαλονίκη 2009-2010

Τζιμόπουλος Χ. Γεωργική υδραυλική: Τόμος ΙΙ Συλλογικά αρδευτικά δίκτυα με καταιονισμό, Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1997

Φινδανής Ε. Υδραυλική Μηχανική, Θεσσαλονίκη 2020 (ISBN: 978-618-5218-57-7)

Giles R. Μηχανική των ρευστών και υδραυλική, ΕΣΠΙ, Αθήνα 1986

George Papaevangelou, Chris Evangelides, Christos Dimitrios Tzimopoulos, A new explicit equation for the friction coefficient in the Darcy-Weisbach equation, Proceedings of the Tenth Conference on Protection and Restoration of the Environment: PRE10, July 6-9, 2010